教科書 p.52 演習問題4 2. について

1　衝突問題の要点

一般的に、２体あるいは多体の衝突問題の要点となることはいくつかある。まず列記しておこう。[1]

1.1　運動量保存

外力が働かない場合、系の運動量は保存する。

1.2　反発係数 e とエネルギー保存

この場合、衝突後の速度を求めるのに、反発係数（あるいは衝突係数ともよぶ）e を用いて、「相対速度」を求める。つまり、２体の衝突で速度 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ が $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$ に変化したのだとすると、

$$e = \frac{\mid \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2 \mid}{\mid \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \mid} \tag{1}$$

である[2]。

ところで、$e = 1$ であれば完全弾性衝突であり、その場合はエネルギーが保存する。エネルギー保存が成り立つ場合には、直接に式 (1) を用いずとも、$\vec{v_1'}, \vec{v_2'}$ を導ける場合がある。

弾性衝突係数：$e < 1$ であればエネルギーは保存しない。

1.3　重心系

重心の位置: $\vec{r}_{CM}$ は、

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{\iota=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{\iota=1}^{n} m_i} \tag{2}$$

となる。

これを一階微分してやれば、重心の速度 $\vec{V}$ となる。

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\sum_{\iota=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{\iota=1}^{n} m_i} \right] \\ &= \frac{\sum_{\iota=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{\iota=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{\iota=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{\sum_{\iota=1}^{n} m_i} \end{aligned} \tag{3}$$

[1] 見落としがちな内容は枠で囲ったが、受験参考書のようにこれだけでよいというものではない。初学者が忘れそうなことである。

[2] 1次元上の運動であれば、$e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2}$ となる。

さて、重心に”乗って”観測する、すなわち座標系を重心に固定することができる。これを「重心系（CM 系）」という。これに対して、当該問題の最初の設定「... 静止していた質量 M_2 の...」という観測は、いわば部屋に固定した座標系であるので、これを「実験室系（LAB 系）」とよぶ。

２体の衝突であれば、重心系では、２体の運動量は同じ大きさで向きが反対である。

1.4　始状態と終状態

衝突の前後を、物理学ではある反応の始まりと終了後という意味で、「始状態 (Initial State, I.S.)」と「終状態 (Final State, F.S.)」と呼ぶ。

2　保存則の関係と実験室系・重心系

問題を解きにかかる前に、条件にあわせて保存則の関係をそれぞれの系で書き抜いておこう。記号は教科書の図に準ずる。

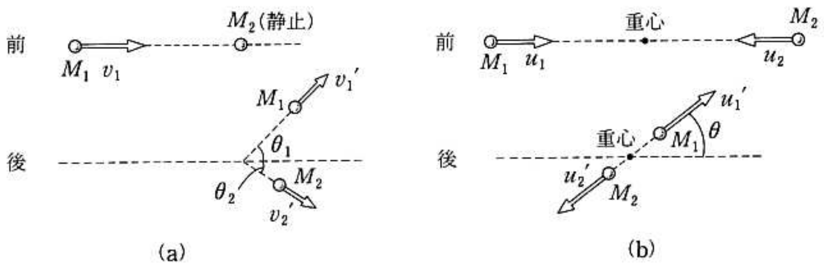

図 1: ２体の衝突。学術図書出版社　基礎物理学コースＩ　江幡武・内田和喜男・坪田明　著　図 4.9 より引用

2.1　運動量保存

衝突の前後で、実験室系、重心系 <u>それぞれで</u>、運動量は保存する。

- 実験室系

$$M_1\vec{v}_1 + 0 \;=\; M_1\vec{v}_1' + M_2\vec{v}_2' \tag{4}$$

$\vec{v}_1$ の方向を x 軸、それと直交する y 軸（２体の運動が $x-y$ 平面上になるようにとる）をとって成分で記せば、x 成分：

$$M_1v_1 + 0 \;=\; M_1v_1'\cos\theta_1 + M_2v_2'\cos\theta_2 \tag{5}$$

y 成分[3]：

$$0 + 0 \;= M_1v_1'\sin\theta_1 - M_2v_2'\sin\theta_2 \tag{6}$$

[3]ここでは θ_2 は開いている角度の大きさだけで、どちらむきかは定義していない。もしきちんと極座標のように定義した場合、sin の符号がかわるので注意されたい。

- 重心系

$\boxed{\text{重心系では運動量の和は 0 である。}}$

確かめておこう。やはり、$\vec{u}_1$ の方向を x 軸、それと直交する y 軸（2体の運動が $x-y$ 平面上になるようにとる）をとる。こうすると、重心系での x 軸は実験室系での x 軸と平行である。

ガリレイ変換[4]を思い出せば、

速度の合成は

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{V}, \quad \vec{u}_2 = 0 - \vec{V} \tag{7}$$

である。

ここで、式 (3) をもちいて、実験室系からみた重心の速度 V は、

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \frac{M_1}{M_1+M_2}\vec{v}_1 \\ &= \left(\frac{M_1}{M_1+M_2}v_1, \quad 0\right)\end{aligned} \tag{8}$$

である。

すると、系全体の運動量の和 $\vec{P}_{sum}$ は、

$$\begin{aligned}\vec{P}_{sum} &= M_1\vec{u}_1 + M_2\vec{u}_2 \\ &= M_1(\vec{v}_1 - \vec{V}) - M_2\vec{V} \\ &= M_1(\vec{v}_1 - \frac{M_1}{M_1+M_2}\vec{v}_1) - M_2\frac{M_1}{M_1+M_2}\vec{v}_1 \\ &= \left(\frac{M_1^2 + M_1M_2 - M_1^2 - M_1M_2}{M_1+M_2}\right)\vec{v}_1 \\ &= 0\end{aligned} \tag{9}$$

つまり重心系での運動量について、

$$\begin{aligned}M_1\vec{u}_1 &= -M_2\vec{u}_2 \\ M_1\vec{u}'_1 &= -M_2\vec{u}'_2\end{aligned} \tag{10}$$

である。重心系では2体の運動量は大きさが同じで反対向き ('back-to-back') である。そもそも「重心」とは、このように見えるような座標系の原点が定義である。

[4]ガリレイ変換がどんなものだったか忘れている人は、すぐにノートを見直せ。

2.2 エネルギー保存

ここで、$e=1$ の完全弾性衝突であることを思い出せ。[5]

完全弾性衝突なので、系のエネルギーは衝突の前後で保存する。

ここでは運動エネルギーのみを考えれば良い。

- 実験室系

$$\begin{aligned} E_{LAB}^{I.S.} &= \frac{1}{2}M_1 v_1^2 + 0 \\ &= \frac{1}{2}M_1 {v'}_1^2 + \frac{1}{2}M_2 {v'}_2^2 = E_{LAB}^{F.S.} \end{aligned} \tag{11}$$

- 重心系

$$\begin{aligned} E_{CM}^{I.S.} &= \frac{1}{2}M_1 u_1^2 + \frac{1}{2}M_2 u_2^2 \\ &= \frac{1}{2}M_1 {u'}_1^2 + \frac{1}{2}M_2 {u'}_2^2 = E_{CM}^{F.S.} \end{aligned} \tag{12}$$

ここで式 (7)(8) より、

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 - V \\ &= \frac{M_2}{M_1+M_2}\ v_1 \end{aligned} \tag{13}$$

を用いる[6]と、式 (12) 第 1 行から、

$$\begin{aligned} E_{CM}^{I.S.} &= \frac{1}{2}M_1\left[\frac{M_2}{M_1+M_2}\ v_1\right]^2 + \frac{1}{2}M_2\left[\frac{M_1}{M_1+M_2}\ v_1\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}\ v_1^2 \end{aligned} \tag{14}$$

となる。

これは終状態でのエネルギー $E_{CM}^{F.S.}$ についても同じであり、式 (12) 第 2 行および式 (10) から[7]、

$$\begin{aligned} E_{CM}^{F.S.} &= \frac{1}{2}\left[M_1 + M_2\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2\right]{u'}_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{M_1}{M_2}\left(M_1+M_2\right)\ {u'}_1^2 \end{aligned} \tag{15}$$

E_{CM} が一定であることを考えると、式 (14)=式 (15) から、

$$\begin{aligned} {u'}_1 &= \frac{M_1}{(M_1+M_2)}\ v_1 \\ &= v_1 - V \end{aligned} \tag{16}$$

がわかる。

[5] もちろん、どんな衝突も完全弾性衝突と言うわけではない。設問や自然現象が与える条件による。
$e \neq 1$ であれば衝突前後でエネルギーは保存しない。

[6] 註：$u_2 = -V$

[7] 註：${u'}_2 = -(M_1/M_2){u'}_1$

2.3　実験室系と重心系の速度の関係

もういちど、実験室系と重心系の速度の関係をおさらいしておこう。質点 1 に注目して説明する。

衝突後について、この場合のガリレイ変換の速度合成を図示すると、図 2 のようになる。
式で書けば、

$$\vec{V} + \vec{u}_1' = \vec{v}_1' \tag{17}$$

である。

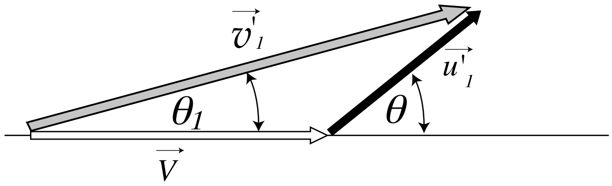

図 2: 実験室系と重心系の速度の関係

これを成分に分けて、式 (16) から、
x 成分：

$$V + (v_1 - V)\cos\theta = v_1'\cos\theta_1 \tag{18}$$

y 成分：

$$(v_1 - V)\sin\theta = v_1'\sin\theta_1 \tag{19}$$

となる。

3　問題解答

では準備が出来たので、問題を解答しよう。

(i) 運動エネルギー：式 (11)、
運動量：式 (4) および (5)(6)

(ii) 式 (8)

(iii) 式 (13)
および同様に、ここで式 (7)(8) より、

$$\begin{aligned} u_2 &= -V \\ &= \frac{M_1}{M_1 + M_2}\, v_1 \end{aligned} \tag{20}$$

(iv) 式 (16) を用い、

x 成分：

$$u'_1 \cos\theta = (v_1 - V)\cos\theta \tag{21}$$

y 成分：

$$u'_1 \sin\theta = (v_1 - V)\sin\theta \tag{22}$$

(v) 式 (18) で (19) を両辺それぞれ割ると、(見通しをよくしたいので、左右入れ替えよう。)

$$\begin{aligned} \frac{v_1'\sin\theta_1}{v_1'\cos\theta_1} &= \frac{(v_1 - V)\sin\theta}{V + (v_1 - V)\cos\theta} \\ \tan\theta_1 &= \frac{\sin\theta}{\frac{V}{(v_1 - V)} + \cos\theta} \end{aligned} \tag{23}$$

さらに、式 (8)(13) より、$\frac{V}{(v_1-V)} = \frac{M_1}{M_2}$ であるから、

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta\ +\ \frac{M_1}{M_2}} \tag{24}$$

と導ける。

(vi) 式 (24) の条件分岐を考えれば良い。なお θ の範囲は図の定義から、

$$0 \le \theta \le \pi \tag{25}$$

である[8]。$\frac{M_1}{M_2} < 1$ ならば、式 (24) 右辺の分母=0, 分子 $\neq 0$ となる θ が $0 \le \theta \le \pi$ の間に存在することがすぐにわかる[9]。この場合は、式 (24) は $\pm$ 無限大になりうるので、θ_1 の範囲には制限がない。またちょうど $\frac{M_1}{M_2} = 1$ ならば、式 (24) は、$\theta = \pi$ で無限大となり、そのときの $\theta_1 = \pi/2$ である[10]。

逆に、$\frac{M_1}{M_2} > 1$ ならば、常に、右辺の分母 > 0 であり、式 (24) は有限な値が最大となる。ということは、θ_1 は有限な範囲になる。

式 (24) の最大値の推定であるが、この式のグラフが描ければ良いのである。まず、式 (24) が極値（ないし最大値最小値）をもつかどうか調べる。

$$\begin{aligned} \tan\theta_1 &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta\ +\ \frac{M_1}{M_2}} \\ &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta\ + x} \\ &= f(\theta) \end{aligned} \tag{26}$$

[8] y の+-どちら側かを分かるように定義するならば、$-\pi \le \theta \le \pi$ である。
[9] $\sin\theta, \cos\theta$ の範囲を考えればすぐにわかる。分からないうちは、三角関数の扱いの訓練が足りないのであろう。訓練不足だといってもしようがないので、本文に推定の仕方を記す。とくに、グラフを意識すること。受験用のちまちましたグラフを描く習慣では対応できないので、下らない習慣は捨てよ。
[10] $\theta \le \pi$ なので、$\theta_1 \le \pi/2$ である。

ここで、簡単のために、$\frac{M_1}{M_2} = x$ とした。$f(\theta)$ を θ で微分すれば、

$$\begin{aligned} \frac{df(\theta)}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}\left[\frac{\sin\,\theta}{\cos\,\theta\ +x}\right] \\ &= \frac{\cos\,\theta}{\cos\,\theta + x} + \frac{\sin^2\,\theta}{(\cos\,\theta + x)^2} \\ &= \frac{1 + x\,\cos\,\theta}{(\cos\,\theta + x)^2} \end{aligned} \tag{27}$$

導関数が 0 になれば関数はそこで極値を持つ。分子=0 で $\frac{df(\theta)}{d\theta} = 0$ となるので、極値を持つときの θ は、

$$\cos\,\theta = -\frac{1}{x} \tag{28}$$

である。そのとき $f(\theta) = \tan\theta_{max}$ とすると、式 (24) に式 (28) を代入して、

$$\begin{aligned} \tan\theta_{max} &= \frac{\sqrt{1 - (-\frac{1}{x})^2}}{-\frac{1}{x} + x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned} \tag{29}$$

これから、$x = \frac{M_1}{M_2}$ で θ_{max} が変わることも、x が 1 より大きいか小さいかで条件が変わることもわかる。さらに、$\tan\theta_{max} = \frac{\sin\theta_{max}}{\cos\theta_{max}} = \frac{\sin\theta_{max}}{\sqrt{1-\sin^2\theta_{max}}}$ を用いると、式 (29) から、

$$\frac{\sin^2\theta_{max}}{1 - \sin^2\theta_{max}} = \frac{1}{x^2 - 1} \tag{30}$$

故

$$\sin\theta_{max} = \frac{1}{x} = \frac{M_2}{M_1} \tag{31}$$

とすると、なお分かりやすい[11]。

それでは、最後に完全に理解できるように、式 (24) のグラフを書いておこう。図 3,4,5 に M_1, M_2 の大小関係の各場合を示す。

(vii) ほとんど前述の式にかかれている。また単に式 (24) を導くだけであれば、前述の式すべてを必要とはしないことも分かるであろう。教科書の略解は重心系をもちいたことによる簡単さを説明している。簡単に要点を記せば、

[11]符号は ± あるが、教科書は角度の大きさだけを議論しているので、ここでは省いた

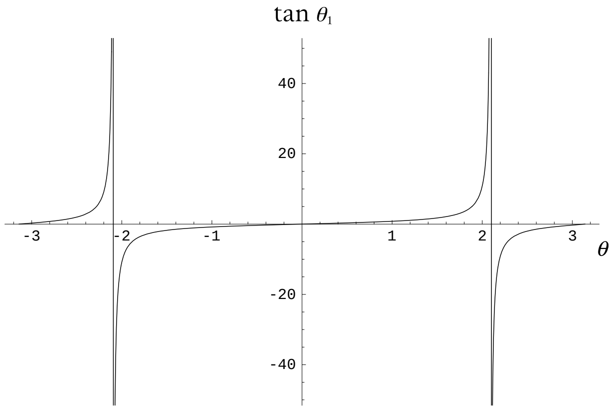

図 3: $M_1 < M_2$

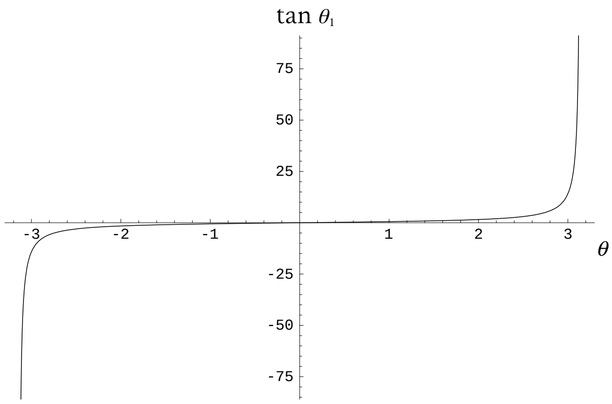

図 4: $M_1 = M_2$

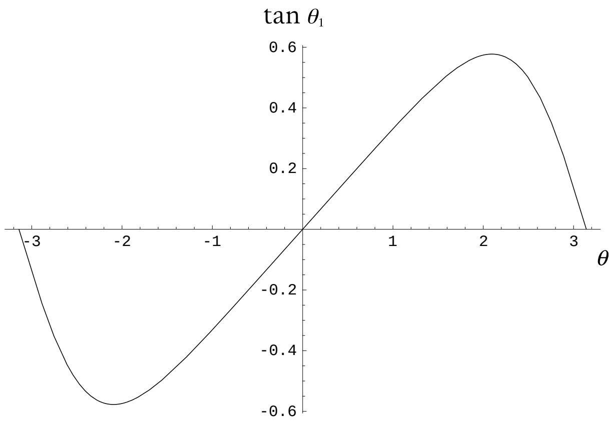

図 5: $M_1 > M_2$

[1] 完全弾性衝突なので、実験室系、重心系それぞれでエネルギーが保存する。

[2] 重心系では衝突前後で２体の運動量は等しい。

[3] 重心系では、衝突後の２体の方向は等方的（どちらの方向も一様に出てくることができる）である。

[4] 実験室系は、重心系の現象を動かしながら[a]眺めている。

[a]これを「ブースト」と表現する

である。等方的なもの（重心系）をある方向に動かしながら観察（実験室系）するので、散乱する方向には偏りができるということである。